Ecuaciones diferenciales ordinarias

Ecuaciones diferenciales ordinarias

Razón de cambio

La medición de razones y proporciones tiene gran aplicación en varias áreas de la ingeniería, es necesario saber tal magnitud para dar una aproximación a problemas de la vida real. Es posible realizar calcular diferencias para cualquier arreglo de datos. En probabilidad y estadística se obtiene razón de interés compuesto, en física el trabajo que se requiere en determinada condición de tiempo y espacio, crecimientos poblacionales, circuitos eléctricos, temperatura etc. Es prudente hacer la observación los eventos anteriores están en función del tiempo "t"

La representación de estos cambios se denota usando el símbolo de incremento "Δ" por lo tanto la razón de cambio "x" en el tiempo "t" se puede representa por

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_o - x_f}{t_o - t_f}$$

El numero de habitantes se duplica cada 5 anos, encontrar la razón de cambio y represente los resultados gráficamente (ver imagen 1.1) para ilustración

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p}{5},$$

La fuerza para mover un objeto es directamente proporcional a su aceleración encontrar la razón de cambio

$$f \alpha a$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta a} = k$$

$$f = ka$$

Las anteriores razones de cambio suponen un incremento o decremento constante, la representación grafica de tales funciones es una función de la forma y=mx+b

Para obtener una mejor aproximación es necesario usar diferenciales, una razón de cambio infinitesimal se puede obtener limitando los incremento a cero "0"

$$\lim_{p \to 0} \lim_{t \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{dp}{dt}$$

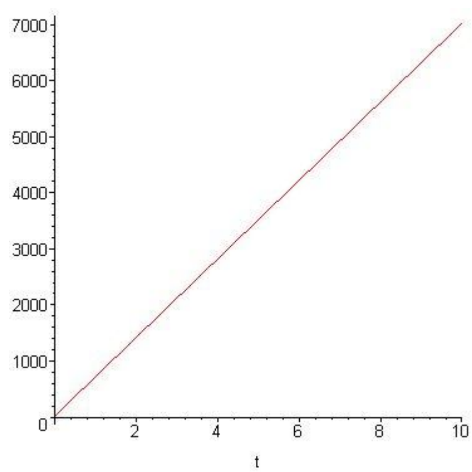
Problemas propuestos

El numero de habitantes se triplica cada ano, encontrar la razón de cambio y una función que prediga la población en un tiempo "t"

La temperatura en una habitación disminuye 3 grados centígrados cada 10 minutos, encuentre la razón de cambio

La masa de un elemento radioactivo decae en el tiempo, encuentre la razón de cambio

Para análisis y comprensión de la grafica siguiente encuentre la razón de cambio



Ecuaciones diferenciales ordinarias

Para obtener una mejor aproximación es necesario usar diferenciales, una razón de cambio infinitesimal se puede obtener limitando los incremento a cero "0"

$$\lim_{p \to 0} \lim_{t \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{dp}{dt}$$

Una ecuación diferencial es una ecuación que contiene derivadas o diferenciales (razones de cambio infinitesimales),

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$
$$dy = 2xdx$$
$$\int dy = 2\int xdx$$
$$y = x^2 + C$$ Encontramos integrando

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$
$$ydy = -xdx$$
$$\int ydy = -\int xdx$$
$$x^2 + y^2 = 2C$$ Encontramos integrando

Las ecuaciones 1 y 2 son ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, la característica de estas funciones es posible despejar la razón de cambio e integrar con facilidad, otro ejemplo de ecuaciones diferenciales son :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

Esta es una ecuación diferencial de segundo orden, así llamado por el orden de la derivada. El orden de una ecuación diferencial es el mismo que el de la derivada de mayor orden que en ella aparece

Ejercicio - Encuentra el grado "n" de las siguiente ecuaciones diferenciales

$$y''^2 = (1 + y')^2$$
$$\frac{d^3y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 4e^x$$

$$\frac{d^5f}{dt^5} - e^{2t} = 2f$$
$$\frac{d^6x}{dy^6} + \frac{d^3x}{dy^3} + e^{2t}\frac{d^2x}{dy^2} + 2t = \cos(t + w)$$

Soluciones de una ecuación diferencial. Constantes de integración

Una solución o integral de una ecuación diferencial es una relación entre las variables, que define a una de ellas como función de la otra, que satisface a la ecuación así.

$$y = e^{rx}$$

Es una solución general de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0$$
$$r^2e^{ex} + re^{rx} + e^{rx} = 0$$
$$r^2 + r + 1 = 0$$

Ejemplo 2

$$y = asenx$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$
$$-asenx + asenx = 0$$

En el problema anterior "a" es una constante arbitraria de la misma manera se puede representar como c1 y c2 respectivamente dan una solución mas general al problema a esta constante arbitraria se la conoce como constante de integración

Ejemplo 3

$$y = b\cos x$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$
$$y = c1\cos x + c2senx$$

Del problema anterior hallar una solución cuando y=2 dy/dx=-1 x=0

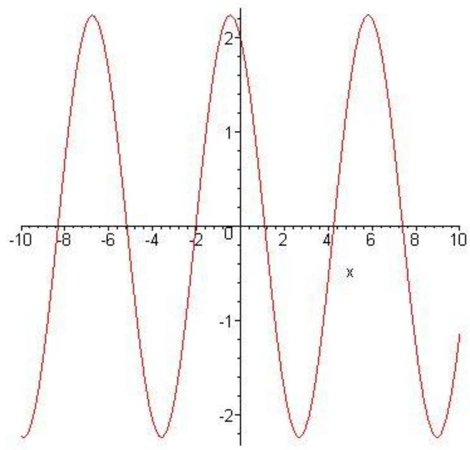
La solución general de la función es $y = c1\cos x + c2senx$ para y=2 e dy/dx=-1 cuando x=0 aplicando relación entre variables

$y = c1\cos x + c2senx$

$$y' = -c1senx + c2\cos x$$
$$2 = c_1 + 0$$
$$-1 = 0 + c_2$$
$$c_1 = 2$$
$$c_2 = -1$$

Sustituyendo los valores encontrados de c1 y c2 en la solución general encontramos nuestro resultado

$$y = 2\cos x - senx$$



Una ecuación diferencial se considera resuelta cuando se ha reducido a una expresión en términos de integrales, pueda o no efectuarse la integración

Verificación de las soluciones de ecuaciones diferenciales

Antes de emprender el problema de resolver ecuaciones diferenciales, Mostraremos como se verifica una solución dada. En los tratados sobre ecuaciones diferenciales se demuestra que la solución general de una ecuación diferencial de orden "n", tiene "n" constantes arbitrarias

Demostrar que

$$y = c_1 xcox\ln x + c_2 xsenx\ln x + x\ln x$$

Es una solución de la ecuación diferencial

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + 2y = x\ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = (c_2 - c_1) sen \ln x + (c_2 + c_1) \cos \ln x + \ln x + 1$$
$$\frac{d^2y}{dx} = -(c_2 + c_1)\frac{sen \ln x}{x} + (c_2 - c_1)\frac{\cos \ln x}{x} + \frac{1}{x}$$

Sustituyendo los valores en la ecuación diferencial original encontramos que la relación de variables satisface la ecuación

Demostrar que

$$y^2 - 4x = 0$$

Es una solución particular de la ecuación diferencial

$$xy'^2 - 1 = 0$$

$$yy' - 1 = 0$$
$$y' = \frac{2}{y}$$

Sustituyendo el valor y' en la ecuación diferencial y reduciendo obtenemos

$$-y^2 + 4x = 0$$

Problemas propuestos

Verifica las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} = 0 \quad y = c_1 + 2x + c_2x^2$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4xy\frac{dy}{dx} + 8y^2 = 0 \quad y = c(x - c)^2$$

Ecuaciones diferenciales de primer orden

Una ecuación de primer orden puede reducirse a al forma

$$Mdx + Ndy = 0$$

Siendo M y N funciones de X e Y

$$\int Mdx + \int Ndy = C$$

Las ecuaciones diferenciales de primer orden pueden dividirse en 4 grupos

Solución problemas implican Ecuaciones con variables separables.

1. cambios de masa
2. cambios temperatura
3. cambio población en el tiempo

los anteriores ejemplos son posible solución que se puede encontrar por medio de ecuaciones de variables separables , para tal observación se be encontrar el incremento y la razón de cambio

$$\frac{dy}{dx} = k$$

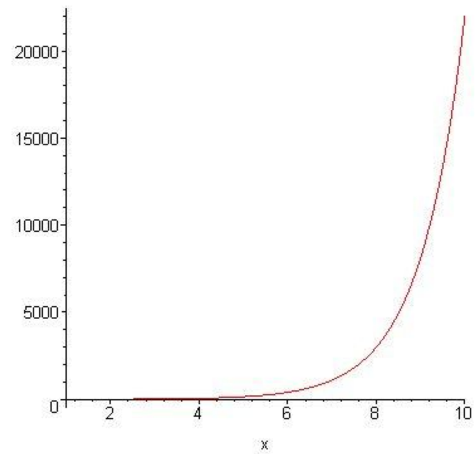
La observación de los problemas afirma que y es directamente proporcional a x esto se representa por

$$y \propto x$$

Para encontrar la solución crear un igualdad necesitamos la razón de cambio representada por "k"

$$y \propto x$$
$$y = \frac{dy}{dx} x$$
$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$
$$\int \frac{dy}{y} - \int \frac{dx}{x} = 0$$
$$\ln y - \ln x = c$$
$$y = e^{x}$$

La solución de este tipo ecuaciones diferenciales se observa en el ejemplo anterior



Una masa "mo" decae a una masa "mf" en un tiempo "t" encontrar la ecuación diferencial que represente tal afirmación

$$\frac{dm}{dt} = km$$

$$\frac{dm}{m} = kdt$$

$$\int_{mo}^{mf} \frac{dm}{m} = k\int_{to}^{tf} dt$$

$$\ln m_f - \ln m_o = k(t_f - t_o) + C$$

$$\ln\left(\frac{m_f}{m_o}\right) = k(t_f - t_o) + C$$

$$\frac{m_f}{m_o} = e^{k(t_f - t_o)} + C$$

$$m_f = m_o e^{k(t_f - t_o)} + C$$

$$k = \ln\left(\frac{m_f}{m_o}\right) / (t_f - t_o)$$

$$m_f = m_o e^{kt}$$

la solución anterior se obtiene con la condición t=0 c=0

Problemas propuestos –

Una masa de 500 Kg. decae a una masa 100 Kg. en un tiempo de 3 min. Encontrar la ecuación diferencial que represente tal afirmación y la mase cuando el tiempo sea de 2 min.

La temperatura en un cuarto es de 3 grados centígrados al pasar 5 min. la temperatura es de 7 grados centígrados, encontrar la ecuación diferencial represente la razón cambio

El incremento poblacional es 3 veces la población inicial en 2 anos, si la población inicial es de 300 habitantes encontrar la ecuación que defina el crecimiento en el tiempo, el numero de habitantes cuando el tiempo sea de 10 anos

La presión atmosférica "P" en un lugar, en función de la altura "h" sobre el nivel del mar. Cambia según la ley del interés compuestos suponiendo que P=1000 gr/cm^2 cuando h=0 y P= 670 gr/cm^2 cuando h=3000 m hallar :

a)- la presión "p" cuando h=2000 m

b)- la presión "p" cuando h=5000 m

Ecuaciones diferenciales homogéneas

Una ecuación lineal homogénea tiene la forma $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ donde "P" y "Q" son funciones

De "X"

La solución de estas ecuaciones se obtiene haciendo

$$y = uz$$

Z y U son funciones de x que deben determinarse por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dz}{dx} + z\frac{dy}{dx}$$
$$u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx} + Puz = Q$$
$$u\frac{dz}{dx} + \left(\frac{du}{dx} + Pu\right)z = Q$$

Determinamos "u" integrando la ecuación

$$\frac{du}{dx} + Pu = 0$$

Resolviendo la ecuación anterior obtenemos que

$$\ln u + \int P dx = \ln k$$

$$u = ke^{-\int Pdx}$$

$$dz = \frac{Q}{k} e^{\int Pdx} dx$$

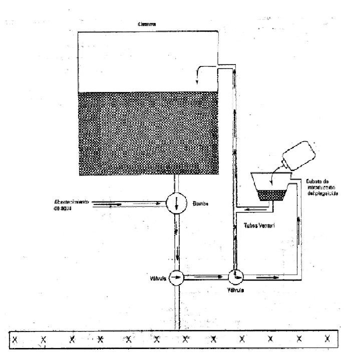
Integrando y sustituyendo en los valores anteriores obtenemos

$$y = e^{-\int Pdx} \left(\int Q e^{\int Pdx} dx + C \right)$$

Solución problemas implican Ecuaciones diferenciales Homogéneas

1. Desleimiento continuo de una solución
2. Cinemática , oposición al movimiento
3. Circuitos eléctricos simples en serie

Un tanque contiene una solución con una densidad de "s" si se la vacía la misma solución con una densidad "s1" encontrar la ecuación diferencial que defina el comportamiento del problema



Supuesto que en la mezcla de volumen total "v" la cantidad de solución "s" en cualquier volumen esta dada por $\frac{ds}{dx} = -\frac{s}{v}$, supongamos que un volumen "Δx" se vacía en el tanque. La cantidad de solución "s" esta dada por:

$$\Delta s = -\frac{s}{v} \Delta x$$

Podemos encontrar la razón de cambio

$$\lim_{\Delta s \to 0} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = -\frac{s}{v}$$

$$\frac{ds}{dx} = -\frac{s}{v}$$

Por lo tanto –

$$s(t) = s_o + (s_i - s_o)e^{-\frac{Rt}{v}}$$

En un circuito dado "E" y de intensidad "I" (amperios) el voltaje "E" se consume en vencer la 1.residencia en R (ohmios) del circuito

2. la inductancia

Ecuación 1 : la siguiente ecuación emplearse en el caso de un circuito en serie combinación resistencia e inductancia

$$E = R\frac{di}{dt} + L\frac{di}{dt}$$

Ecuación 2 : la siguiente ecuación representa un circuito acumulador y resistencia

$$E = QC + Ri$$

$$E = C\frac{di}{dt} + Ri$$

Las anteriores formulas son en fundamento la ley conservación de la carga y energía (ley de kirchoff)

La intensidad o corriente se define como el cambio de carga en el tiempo

$$I = \frac{dq}{dt}$$

La energía electromotriz representado con la letra "E" o "V" voltaje es directamente proporcional a la corriente y resistencia del medio "R"

$$E = RI$$

$$E = R\frac{dq}{dt}$$

La capacitancía "C" (faradios) en un acumulador es directamente proporcional al voltaje "E" e inversamente proporcional a la carga "Q"

$$C = \frac{E}{Q}$$

Circuito en serie combinación resistencia "R" y un acumulador "C"

Circuito en seria combinación resistencia "R", acumulador "C" y transformador "L"

Circuito en serie, combinación resistencia "R" y transformador "L"

El movimiento de un proyectil puede ser afectado en gran proporción por la fricción (aire) Es posible usar la segunda ley de newton para dar una representación del problema

$$\begin{aligned}
&\sum f_y = ma \\
&mg - bv = ma \\
&g - \frac{b}{m}v = a \\
&a + \frac{b}{m}v = g \\
&\frac{dv}{dt} + \frac{b}{m}v = g
\end{aligned}$$

$$dv + v\left[\frac{b}{m}\right]dt = gdt$$

Usando la solución general ecuaciones homogéneas con "t"=0 y "v"=0

$$\begin{aligned}
&P = \frac{b}{m} \\
&Q = g \\
&v = e^{-\int Pdt}\left(\int Qe^{\int Pdt}dt + C\right) \\
&v = \frac{mg}{b}\left(1 + e^{-bt/m}\right)
\end{aligned}$$

Problemas propuestos –

Un circuito en serie contiene una resistencia de 100 ohm y un transformador con L=2 henrios

Conectados a una fuente de 12 volts ¿Encuentre ecuación del circuito en función del tiempo?

Un circuito en serie contiene un acumulador con capacitan cía de 100 uf y una resistencia de 200 ohm conectados a una fuente de 120 voltios , ¿encuentre la ecuación del circuito en función del tiempo?

Un contenedor contiene un volumen de 10,000 litros contiene una solución "s" se añade agua limpia al contenedor ¿Cuánta agua debe hacerse correr para quitar al 50% de la solución "s""

Una pelota de béisbol con un peso de "1.4 N" deja el bat con una rapidez aproximada de 100 mi/hr con una inclinación de "60" grados respecto el eje horizontal "x" si el viento ejerce una fuerza en oposición a b=0.033 N

a. encontrar la ecuación que defina su movimiento en el función del tiempo
b. graficar los resultados
c. graficar los resultados sin considerar la fricción del viento

Dos tipos especiales de ecuaciones diferenciales de orden superior

Este tipo de ecuaciones diferenciales tiene la forma

$$\frac{d^n y}{dx^n} = X$$

En donde "X" es una función de "x" únicamente, o una constante para integrar

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \int \frac{d^n y}{dx^n} dx = \int X dx + C_1$$

El proceso anterior se repite (n-1) veces, de esta manera se obtendrá la solución general, que contendrá "n" constantes arbitrarias

Ejemplo –

$$\frac{d^3y}{dx^3} = xe^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int xe^x dx$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = xe^x - e^x + C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \int xe^x dx - \int e^x dx + C_1 \int dx$$

$$\frac{dy}{dx} = xe^x - 2e^x + C_1 x + C_2$$

$$\int dy = \int xe^x dx - 2\int e^x dx + C_1 \int x dx + C_2 \int dx$$

$$y = xe^x - 3e^x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

Las siguientes ecuaciones tiene la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Y$$

Donde "Y" es una función de "y" únicamente

$y' dy' = Ydx$

$y' dy' = Ydy$

Lo anterior es valido por $y' dx = dy$

$$y' dy' = Ydy$$

$$\frac{1}{2} y'^2 = \int Ydy + C_1$$

El segundo miembro es una función de y. Extrayendo la raíz cuadrada, las variables "x" e "y" quedan separadas. Y podemos integrar otra vez

Problemas propuestos –

Hallar la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\frac{d^2x}{dt^2} = t^2$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 4sen2t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = e^{2t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a^2}{y^2} = 0$$

Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes

Las ecuaciones tiene la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0$$
$$y'' + py'' + qy = 0$$

La solución de estas ecuaciones se obtiene al usar la sustitución

$$y = e^{rx}$$

Por lo tanto derivando la sustitución obtenemos

$$y = e^{rx}$$
$$\frac{dy}{dx} = re^{rx}$$
$$\frac{d^2y}{dx} = r^2e^{rx}$$

Sustituyendo en la forma general obtenemos que

$$r^2e^{rx}+re^{rx}+e^{rx}=0$$
$$r^2+r+1=0$$

Donde y=e^{rx}es una solución de la ecuación y "r" son las raíces de la función y distintas

$$y=c_1e^{rx}+c_2e^{rx}$$

Cuando la raíz de la función es imaginaría y toma la forma $r=a+bi$ la solución será:

$$y=e^{ax}(A\cos bx+Bsenbx)$$

Cuando las raíces de la función son iguales r1=r2 la solución del problema será

$$y=c_1e^{rx}+c_2xe^{rx}$$

Resolver la ecuación con la condición s=4 t=0

$$\frac{d^2s}{dt^2}+2\frac{ds}{dt}+s+0$$

Usando la sustitución $s=e^{rt}$y resolviendo para "r"

$$r^2+2r+1=0$$
$$(r+1)^2=0$$
$$s=e^{-t}(c_1+c_2t)$$

Sustituimos las condiciones iniciales en la solución

$$c_1=4$$
$$c_2=2$$
$$s=e^{-t}(4+2t)$$

Encontrar la solución de la ecuación

$$\frac{d^4y}{dx^4}-4\frac{d^3y}{dx^3}+10\frac{d^2y}{dx^2}-12\frac{dy}{dx}+5y=0$$

Usando la sustitución encontramos

$$r^4-4r^3+10r^2-12r+5=0$$

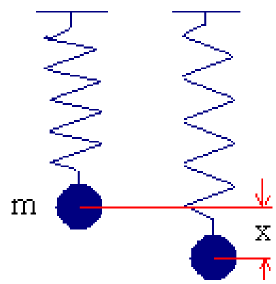
Resolviendo para "r" encontramos

$$r = 1$$
$$r = 1$$
$$r = 1 \pm 2i$$

Por lo tanto la solución general es:

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^x \cos 2x + c_4 e^x sen 2x$$

Oscilador Armónico simple



Imagínese una masa "m" en una superficie sin fricción colgando de un resorte la observación del movimiento nos da la suposición que al aumenta la fuerza "F" de igual manera aumentara la longitud del resorte "X" lo anterior puede representarse como:

$$F \alpha X$$

La fuerza es directamente proporcional a la longitud , para crear un igualdad podemos calcular la razón de cambio

$$\frac{\Delta F}{\Delta X} = k$$

Sustituyendo en la ecuación inicial obtenemos que

$$F = kx$$

Lo anterior de define como la ley de hooke aplicada a un resorte, es pertinente notar que la ley de hooke solo es valida cuando el objeto puede recuperar su forma original . la razón de cambio nos indica que la función de fuerza en razón de la distancia F(x) tiene la forma y=mx+b una línea recta.

De lo anterior podemos definir una ecuación diferencial que resuelva la oscilación de un resorte

$$\sum F_y = ma$$

La segunda ley de newton, la sumatoria de las fuerzas es igual a la masa por aceleración por lo tanto

$$-kx = ma$$
$$ma + kx = 0$$
$$\frac{d^2x}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

Aplicando la solución de las ecuaciones de segundo orden con coeficiente constantes encontramos:

$$\frac{d^2x}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$r^2 + \frac{k}{m}r = 0 \quad \frac{-k/_m \pm \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2}}{2}$$

$$X(t) = A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + B\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t \quad \frac{-k/_m \pm \left(\frac{k}{m}\right)}{2}$$

Cuando las condiciones de la formula anterior es t=0 , v=0 y x= Amplitud del resorte "Y"

$$Y = A\cos(0) + B\sin(0) = A$$

$$0 = A\sin(0) + B\cos(0) = B$$

Siendo A = amplitud del resorte posición alargamiento después de equilibrio y B=0

$$X(t) = A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Es posible también escribir la solución de un problema de la forma anterior sin tener las condiciones t=0 v=0 usando un Angulo de fase

$$X(t) = A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + B\sin\sqrt{\frac{k}{m}} = X(t) = X\sin\left(\frac{k}{m} + \sigma\right)$$

La amplitud "X" puede definirse como

$$X = \sqrt{A^2 + B^2}$$

El Angulo de fase debe ser en radianes

$$\sigma = \tan\frac{A}{B}$$

Bibliografia

Autor Granville, "Calculo diferencial e integral", editorial LIMUSA

ISBN 968-18-1178-X

Autores Berkley/Blanchard, "Calculos", Saunders College Publishing